Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

RM
2022-2023

On considère sauf mention contraire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ avec $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne.

1 Loi de variables aléatoires

1.1 Définitions

Définition 1 : On appelle variable aléatoire toute application mesurable X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeur dans $(E, \mathcal{B})$.

Remarque 2 : On considère le plus souvent des variable aléatoire réelles et vectorielles, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$.

Exemple 3 : Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \delta_x)$ où $x \in \Omega$, toute variable aléatoire X est δ_x-p.s constante. En effet, $\delta_x(\{\omega : X(\omega) = c\}) = 1$ si $c = x$ et 0 sinon.

Définition 4 : Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$. On appelle loi de X sous la probabilité $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité image $\mathbb{P}^X$ sur $(E, \mathcal{B})$. On notera parfois $\mathcal{L}(X)$ la loi de X.

Remarque 5 : Pour alléger les notations, on a pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(\{X \in B\}) = \mathbb{P}(X \in B)$. On écrira souvent " Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}$ " pour dire " Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où μ telle que μ^X est $\mathbb{P}$ ".

Définition 6 : On dit qu'une loi est discrète si c'est une combinaison linéaire finie ou dénombrable de masses de Dirac. Une variable aléatoire de loi discrète $\mathbb{P} = \sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}$ ne prend (presque sûrement) qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs, avec $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Exemple 7 : Voici les loi discrète usuelles :
- Loi uniforme discrète : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{b-a+1} \delta_k$.
- Loi de Bernoulli : $\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$.
- Loi binomial : $\mathbb{P}_x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$.
- Loi Géométrique : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \delta_k$.
- Loi de poisson : $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$.

Définition 8 : Si une loi $\mathbb{P}$ est absolument continue par rapport à une mesure μ et si X est de loi $\mathbb{P}$, on dira par abus de langage que X admet la densité f par rapport à μ si $f = d\mathbb{P}/d\mu$. Si μ est la mesure de Lebesgue, on dit simplement que X est de densité f.

Exemple 9 : Loi usuelles à densité :
- Loi uniforme sur $[a, b]$: $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$.
- Loi exponentielle paramètre λ : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.
- Loi normal paramètre (m, σ^2) : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

1.2 Espérance de variable aléatoire

Définition 10 : Si X est intégrable, on appelle espérance de X le nombre réel $E(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P}$. On dit que X est centrée si elle est intégrable et $E(X) = 0$.

Remarque 11 : L'espérance d'une variable aléatoire représente sa valeur moyenne.

Théorème (de Transport) 12 : Soit X une variable aléatoire réelle et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne. Alors $\phi(X) \in L^1(\mathbb{P})$ si et seulement si $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, et alors $E(\phi(X)) = \int_\mathbb{R} \phi(x) d\mathbb{P}_X(x)$.
En particulier, on a $E(X) = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X(x)$.

Remarque 13 : Cela nous permet de calculer $E(\phi(X))$ sans connaître la loi de $\phi(X)$.

Corollaire 14 : Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $E(\mathbb{1}_A(X)) = \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$.

Exemple 15 : L'espérance de X suivant une loi :
- Binomial $\mathcal{B}(n, p)$ est np.
- De poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est λ.
- Exponentielle λ est $\frac{1}{\lambda}$.
- Normal $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est m.

Théorème (Inégalité de Jensen/Hölder) 16 : $i)$ Si ϕ est convexe sur $\mathbb{R}$ et si X est une variable aléatoire réelle telle que X et $\phi(X)$ sont intégrables, alors $\phi(E(X)) \leq E(\phi(X))$.
$ii)$ Si $X \in L^p$ et $Y \in L^q$ avec $p, q \geq 1$ conjuguées, alors $E(|XY|) \leq E(|X|^p)^{1/p} E(|Y|^q)^{1/q}$.

Définition 17 : On dit qu'une variable aléatoire X admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$ et on appelle $\mathbb{E}[X^p]$ le moment d'ordre p de X.

2 Caractérisation de la loi par des fonctions

2.1 Fonctions de répartition

On suppose que X est un variable aléatoire réelle.

Définition 18 : On appelle fonction de répartition de X, ou de sa loi $\mathbb{P}_X$, et on note F_X la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $F_X(t) = \mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \leq t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 19 : Une fonction de répartition F vérifie les propriétés suivantes :
i) $0 \leq F \leq 1$.
ii) F est croissante, continue à droite avec une limite à gauche.
iii) $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +_infty} F(t) = 1$.
Réciproquement, une fonction F vérifiant les 3 assertions est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Proposition 20 : La fonction de répartition caractérise la loi, c'est-à-dire $F_X = F_Y$ si et seulement si $\mathbb{P}_X =_P P_Y$.

Remarque 21 : Si $\mathbb{P}_X$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, sa fonction de répartition s'écrit $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x) d\lambda(x)$.

Exemple 22 : *i)* Soit $\lambda > 0$, alors $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ.
ii) $F = \mathbb{1}_{[x,+\infty[}$ est la fonction de répartition de la masse de Dirac δ_x en $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 23 : Si X est de fonction de répartition F, alors pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, la variable aléatoire $Y = \sigma X + m$ a pour fonction de répartition $F((t-m)/\sigma)$ puisque $\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\sigma X + m \leq t) = \mathbb{P}(X \leq (t-m)/\sigma)$.

2.2 Fonctions caractéristiques

Définition 24 : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction caractéristique de X ou de la loi de X, et on note φ_X, la fonction à valeurs complexes $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ avec $t \in \mathbb{R}$. C'est la transformée de Fourier de $\mathbb{P}_X$.

Exemple 25 : Si la loi de X a une densité f, alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx$.

Proposition 26 : On a que $\varphi_X(0) = 1$ et $|\varphi_X(t)| \leq 1$.

Proposition 27 : Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de lois $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ telles que $\varphi_X = \varphi_Y$, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. Autrement dit, la fonction caractéristique caractérise la loi (elle porte donc bien son nom !).

Exemple 28 : • Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.
• Si X est de loi de poisson de paramètre λ, alors $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$.
• Si X est de loi binomial n et p, alors $\varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$.

Développement 29 : La fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est

$$exp(i\mu t) exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

La fonction caractéristique de la loi de Cauchy $\mathcal{C}(a,b)$ est

$$e^{iat} e^{-b|t|}$$

Dev 1

2.3 Fonctions génératrices

Définition 30 : Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire. On appelle série génératrice de X la série notée $G_X(z)$ et définie par $G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) z^n$, de rayon de convergence ≥ 1.

Proposition 31 : Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire. La série génératrice de X converge normalement pour $|z| \leq 1$, elle vérifie les propriétés suivantes :
i) $z \to G_X(z)$ est définie et continue sur $|z| \leq 1$, en particulier sur $[0,1]$.
ii) Lorsque $t \in [0,1]$, on a $G_X(t) = E(t^X)$. On a $G_X(1) = 1$.
iii) X admet une espérance si et seulement si G_X est de classe C^1 sur $[0,1]$, et dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$.
iv) X admet une variance si et seulement si G_X est de classe C^2 sur $[0,1]$, et dans ce cas $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.
v) Soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire. Alors $G_X = G_Y$ sur $[0,1]$ si et seulement si X et Y ont même loi.
Soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire indépendante de X. Alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Application 32 : Soit $(X_{n,i})_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ indépendantes identiquement distribuées de loi $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec $p_0 \in]0,1[$ et d'espérance m. On définit la suite (Z_n) de la manière suivante

$$Z_0 = 1 \qquad et \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} \quad (Z_{n+1} = 0 \quad \text{si} \quad Z_n = 0).$$

Enfin on note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et $P_{ext} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0)$.
Si $m \leq 1$, $P_{ext} = 1$ et le processus s'éteint presque surement.
Si $m > 1$, $P_{ext} < 1$ et il y a une probabilité de survie non nul.

Remarque 33 : Ici Z_n modélise le nombre d'individus à la génération n et $X_{n,i}$ le nombre de descendant de l'individu i à la n-ième génération, π_n la probabilité d'extinction à la génération n et P_{ext} la probabilité d'extinction de la population.
On étudie alors la descendance d'un seul individu et donc on pose $Z_0 = 1$.
Le développement nous dit alors que si la moyenne de descendant pour chaque individus est inférieur ou égale à 1, alors la lignée va s'éteindre presque surement, et si la moyenne est plus grande que 1, alors il y a une probabilité non nul que la lignée survive.

3 Convergence en loi

Définition 34 : On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles convergent en loi vers X si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \mathbb{E}[\varphi(X_n)] \to \mathbb{E}[\varphi(X)]$ quand n tends vers $+\infty$.
On note $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$.

Théorème (de Lévy) 35 : Soit X,$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires réelles, alors on a équivalence entre :

i) X_n converge en loi vers X.

ii) La suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ_X.

Remarque 36 : Ce théorème est très pratique, car il est plus simple de montrer une convergence simple que la convergence en loi. On a par exemple l'application :

Application (Théorème Centrale Limite) 37 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire réelle indépendantes et identiquement distribuées admettant des moments d'ordre 2. On pose $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$. En posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,on a alors

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Proposition 38 : On a X_n converge en loi vers X si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ en tout point de continuité t de F_X.

Exemple 39 : Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $X_n = (-1)^n X$. Alors X_n converge en loi vers X.

Proposition 40 : Si (X_n) et X à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors X_n converge en loi vers X si et seulement si $\lim\limits_{+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 41 : Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n suit une loi binomial de paramètre $(n, \lambda/n)$, alors la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire x suivant une loi de poisson de paramètre λ.

3.1 Lien avec les autres convergences

Proposition 42 : Si (X_n) converge presque surement vers X, alors elle converge aussi en loi. Plus généralement, toutes autres types de convergence (probabilité, L^p) implique la convergence en loi.

Théorème (Inégalité de Hoeffding) 43 : Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes, bornées $\mathbb{P}$-p.s et centrées; on suppose que $|X_n| \leq c_n$ $\mathbb{P}$-$p.s$, avec $c_n > 0$. On note $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^n c_j^2}\right).$$

Dev 2

Application 44 : Soit $\alpha > 0$. On suppose qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\sum_{j=1}^n c_j^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$.
Alors on a que

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0.$$

Références :

1. Algèbre Probabilité Gourdon
2. Probabilité Barbe Ledoux
3. Probabilité tome 2 Ouvrard
4. De l'intégration aux probabilités Garet